Vom Zeit- zum Spektralbereich: Fourier-Analyse

Ergebnis der Analyse

- Zerlegung eines beliebigen periodischen Signals in einem festen Zeitfenster in eine **Summe von Sinoidalschwingungen**
- Ermittlung der Amplituden (und Phasen) der einzelnen Sinoidalschwingungen

$\longrightarrow$ **Ermittlung des Amplituden- (und Phasen)spektrums eines Zeitsignals**

Korrelation

- Je größer die Amplitude einer Sinoidalschwingung relativ zu den anderen, desto stärker prägt sie das Aussehen der komplexen Schwingung, desto stärker ähnelt also die komplexe Schwingung der Sinoidalschwingung

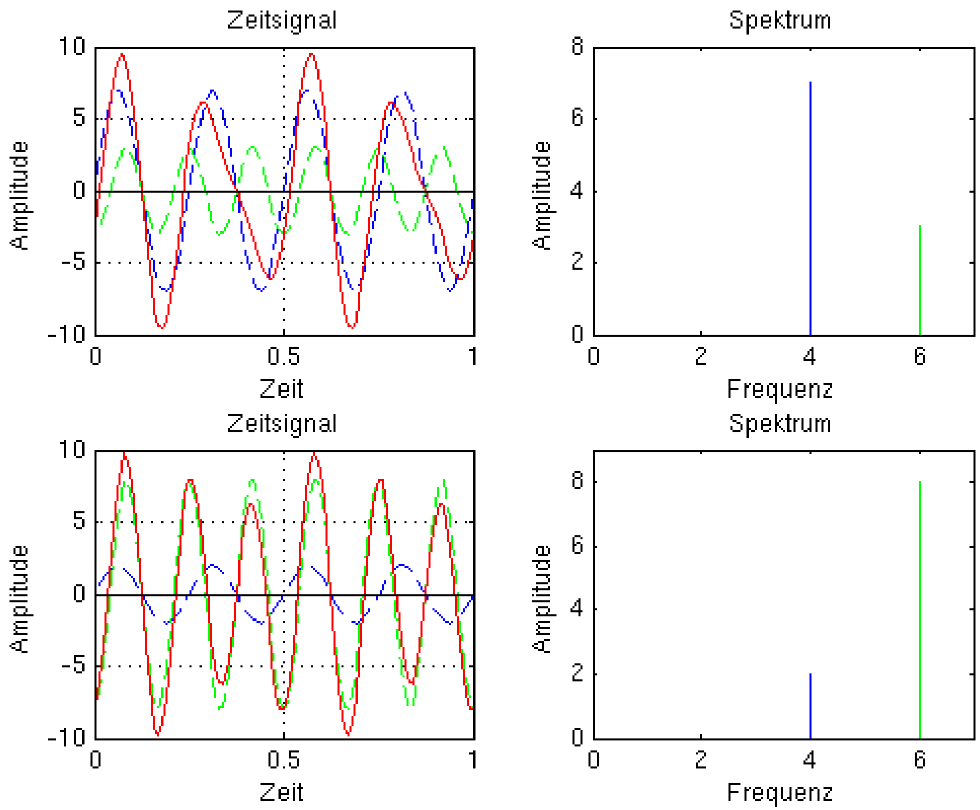

Abbildung 10: *Teilschwingung mit jeweils größerer Amplitude (***oben:** *blau,* **unten:** *grün) hat stärkeren Einfluss auf das Aussehen der komplexen Schwingung (rot).*

- die Ähnlichkeit wird mittels **Korrelation** bestimmt
- Die **Korrelation** zwischen den Schwingungen $y(t)$ (hier: der komplexen Schwingung) und $s(t)$ (hier: der Teilschwingung) wird über das **Skalarprodukt** ermittelt. Wertepaare werden miteinander multipliziert und das ganze dann aufsummiert.

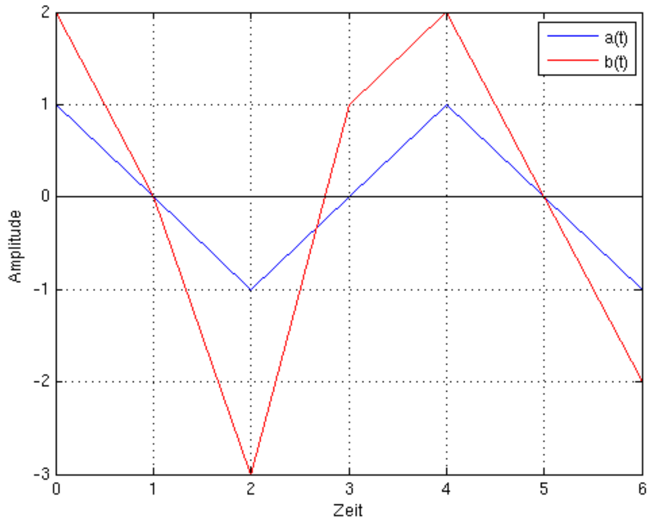

Abbildung 11: Skalarprodukt zwischen 2 Zeitfunktionen $a(t)$ und $b(t)$ (mit Messwerten zu den Zeitpunkten 0,1, 2 . . . 6): $\sum_t a(t) \cdot b(t) = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-3) + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) = 9$.

- Bei unendlich kleinen Zeitabständen entspricht die Summe einem **Integral**, also der **Fläche** zwischen der Nulllinie und dem Multiplikationsergebnis von $y(t)$ und $s(t)$. Je höher die Korrelation, desto größer die Ähnlichkeit der Schwingungen.
- Ist eine Sinoidalschwingung **nicht** in einer komplexen Schwingung enthalten, so ist die Korrelation gleich 0. Man sagt, die Schwingungen sind **nullkorreliert**. Grund hierfür ist das sog. **Orthogonalitätsprinzip**.

Orthogonalität

- Sinoidalschwingungen unterschiedlicher Frequenz sind **orthogonal** zueinander, d.h. sie sind miteinander nullkorreliert

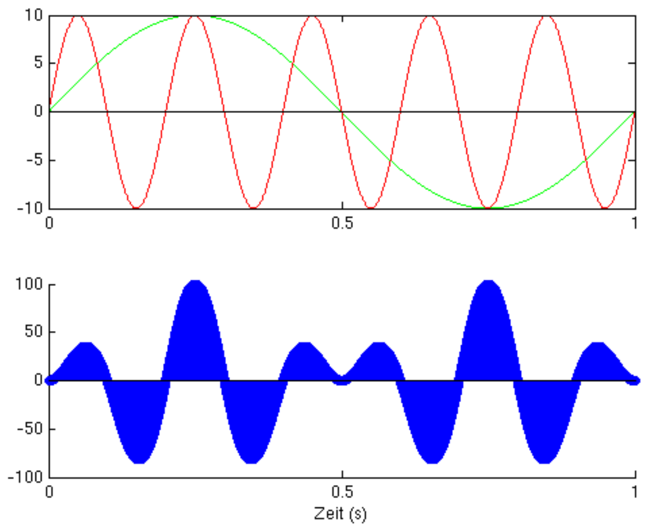

Abbildung 12: Orthogonalität zwischen 2 Sinoidalschwingungen unterschiedlicher Frequenz. **Unten:** Inkrementelle Bildung des Skalarprodukts. Am Ende ist das Produkt gleich 0.

- Wenn eine Sinoidalschwingung $s(t)$ also nur mit einer Sinoidalschwingung derselben Frequenz eine Korrelation ungleich 0 aufweisen kann, dann lässt sich daraus folgern: es besteht nur eine Korrelation zwischen $s(t)$ und einer komplexen Schwingung $y(t)$, wenn eine Schwingung mit der Frequenz von $s(t)$ in $y(t)$ enthalten ist.
- Die Fourieranalyse prüft also für Sinoidalschwingungen diverser Frequenzen[5] , ob sie in der komplexen Schwingung enthalten sind.

Problem

- Nullkorrelation kann auch bei Zusammentreffen bestimmter Phasenverschiebungen und Frequenzverhältnisse zwischen $s(t)$ und $y(t)$ auftreten, **obwohl** $s(t)$ in $y(t)$ enthalten ist. Hier ist die Schlussfolgerung, dass $s(t)$ nicht in $y(t)$ enthalten ist, falsch. **Was tun?**

[5] ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz

Lösung: Sinus- und Cosinusanteil von Sinoidalschwingungen

- Jede Sinoidalschwingung lässt sich in Form eines Sinus- und Cosinusanteils darstellen.

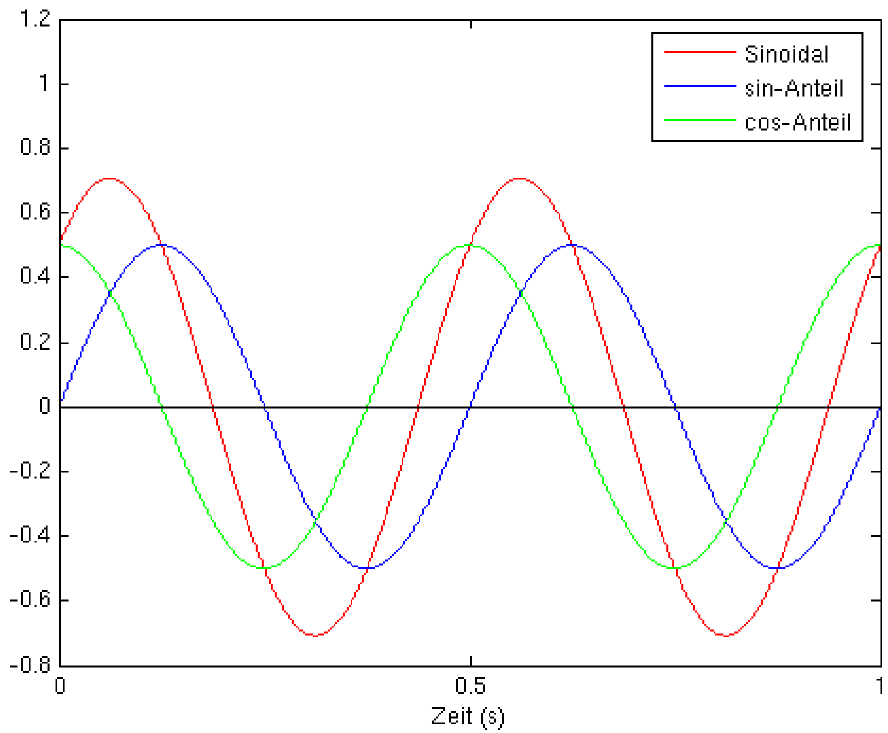

Abbildung 13: *Darstellung einer Sinoidalschwingung (rot) in Form ihres Sinus- (blau) und Cosinusanteils (grün).*

- Die **Amplitudenwerte** der Sinoidalschwingung ergeben sich über Pythagoras: $A = \sqrt{A_u^2 + A_g^2}$, wobei A gleich der Amplitude der Sinoidalschwingung, A_u gleich der Amplitude des Sinusanteils und A_g des Cosinusanteils.
- **nicht verwechseln!** Die Amplitude einer **komplexen Schwingung** ergibt sich durch **Aufsummieren** der Amplituden der enthaltenen Sinoidalschwingungen. Die Amplitude einer **Sinoidalschwingung** ergibt sich durch Verknüpfung der Amplituden ihres Sinus- und Cosinusanteils über **Pythagoras**.

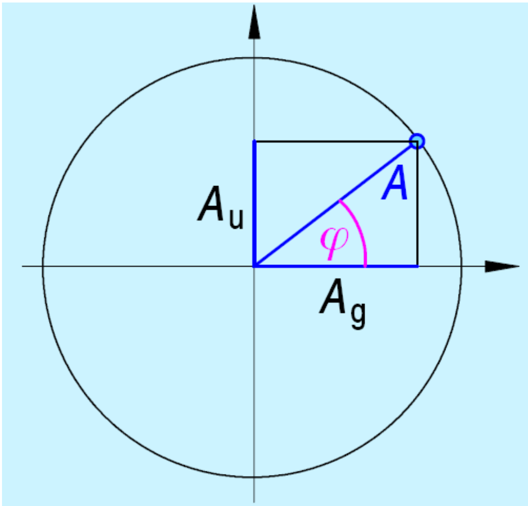

Abbildung 14: *Berechnung der Amplitude einer Sinoidalschwingung anhand der Amplituden ihres Sinus-Anteils A_u und Cosinus-Anteils A_g mittels Pythagoras.*

- die **Phase** lässt sich als eine Art **gewichtetes Mittel** der Phasen von Sinus- und Cosinusanteil verstehen, d.h. wenn die Amplitude des Sinusanteils größer ist als die des Cosinusanteils, verschiebt sich die Phase Richtung Sinus, u.u.
- genauer betrachtet ist die Phase der zum Amplitudenverhältnis von Sinus und Cosinus gehörige Winkel: $\arctan(\frac{A_u}{A_g})$. $\frac{A_u}{A_g}$ entspricht dem Verhältnis von Gegenkathete (A_u) zu Ankathete (A_g; vgl. Abb. 14), ist also der **Tangens**. Die Umkehrfunktion $\arctan$ liefert den zum Tangens gehörigen Winkel, und der ist die Phase der Sinoidalschwingung.

Festzuhalten: Man gibt $s(t)$ in Form eines Sinus- und eines Cosinusanteils an, da aufgrund ihrer Phasenverschiebung um $\frac{\pi}{2}$ mindestens einer der beiden mit $y(t)$ korreliert ist.

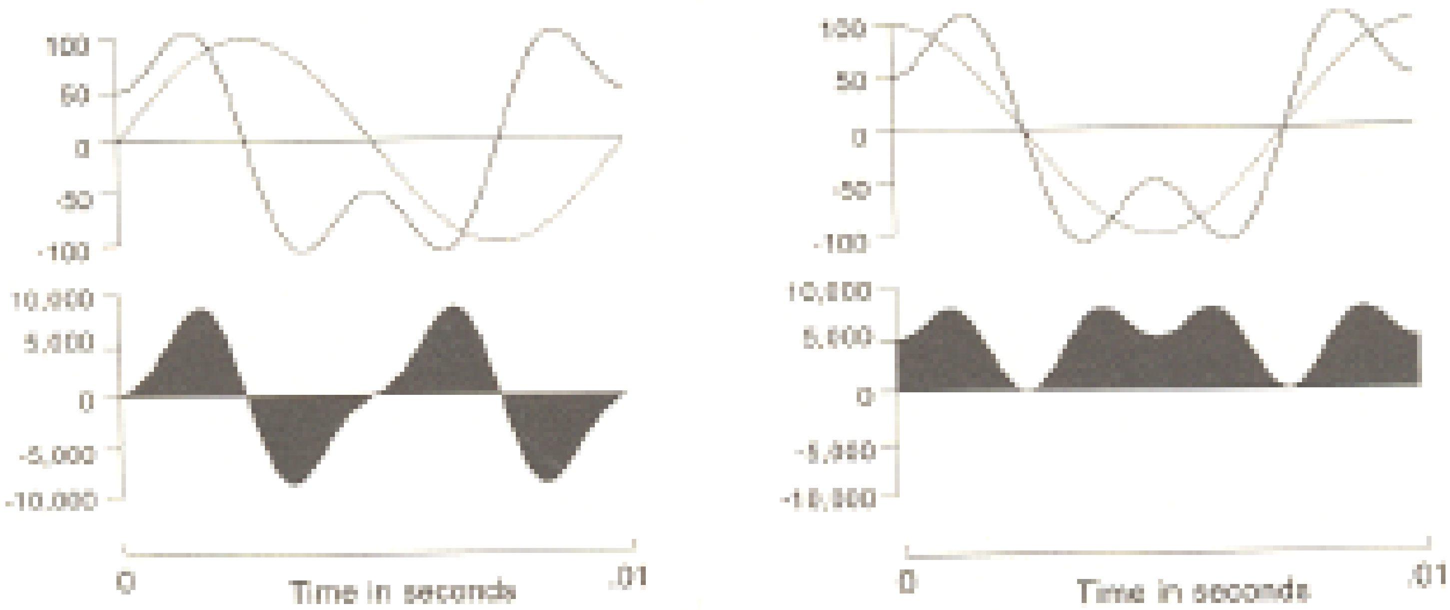

Abbildung 15: **Links:** *Sinus-Teilschwingung mit komplexer Schwingung nicht korreliert. Integral der Multiplikation der beiden Schwingungen über eine Periode ist 0.* **Rechts:** *Cosinus-Teilschwingung mit komplexer Schwingung korreliert. Intergral > 0. (aus Ladefoged: Elements of Acoustic Phonetics)*

Konkretes Vorgehen bei der Fourieranalyse

- Gegeben sei ein periodisches Zeitsignal $y(t)$ mit Grundfrequenz f_0[6]
- Ermittle für alle Sinoidalschwingungen, deren Frequenz ein Vielfaches n zur Grundfrequenz f_0 ist, die Korrelation ihres Sinus- und Cosinusanteils zu $y(t)$ und ermittle daraus ihre Amplituden a_n und b_n. Dies geschieht wie beschrieben mit Hilfe eines Integrals.

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(\omega t)\cdot\sin(n\omega t)dt \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(\omega t)\cdot\cos(n\omega t)dt
\end{aligned}
$$

  wo $\omega = 2\pi f_0$ (Winkelgeschwindigkeit). Das Integral überstreicht eine Periode der Grundschwingung. t läuft über alle Zeitpunkte in der Periode.

[6] $y(t)$ gewinnt man, indem man mittels eines Analysefensters ein Zeitsegment aus einem größeren Signal herausschneidet und dieses Segment so behandelt, als entspräche es genau einer Periode der zu analysierenden Schwingung. f_0 ist dann bekanntlich der Kehrwert der Dauer dieser Periode. Um die für die folgenden Operationen nötige Periodizität zu gewährleisten, nimmt man vereinfachend an, dass alle vorangehenden und folgenden Segmente gleich dem gerade betrachteten Segment sind. Mehr dazu später.

- $[0\ 2\pi]$ bezieht sich hierbei auf die zu f_0 gehörige Periode
- a_n bezeichnet die Amplitude des Sinusanteils der Sinoidalschwingung mit der n-fachen Frequenz zu f_0 und b_n die Amplitude ihres Cosinusanteils. a_n und b_n werden auch als **Fourierkoeffizienten** bezeichnet. Sind sowohl a_n als auch b_n gleich 0, so ist die n-te Vielfache der Grundfrequenz nicht im Signal enthalten.
- Durch dieses Vorgehen erhält man $y(t)$ in Form der Summe seiner Teilschwingungen, der sog. **Fourierreihe**:

$$y(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin(2\pi f_0 n t) + b_n \cos(2\pi f_0 n t))$$

wobei f_0: Grundfrequenz,
b_0: Gleichanteil (Offset): Anhebung bzw. Absenkung von Nulllinie
a_n, b_n: Fourierkoeffizienten = Amplituden des Sinus- und Cosinusanteils der n-ten Vielfachen von f_0

- Die Amplitude A_n der n-ten spektralen Komponente ergibt sich schließlich über Pythagoras aus den Amplituden ihres Sinus- und Cosinusanteils (den Fourierkoeffizienten): $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Behandlung aperiodischer Signale:

- Annahme eines periodischen Signals mit gegen 0 gehender f_0.