

Die Binomialverteilung

Frage: Ich werfe 9 Würfel. Bei welcher *Anzahl* von Würfeln mit einer 3 klage ich den Händler wegen gezinkter Würfel an?

Hier wollen wir nicht den *Mittelwert* der Würfel berechnen, sondern die *Anzahl* einer gewissen Nummer (also wie oft kommt die 3 vor?). Der erste ist **kontinuierlich** (da der Mittelwert ein Bruchteil sein kann) die zweite **diskret** (ich bekomme z.B. 4 Mal, aber nicht 4.3 Mal, eine 3 in einem Wurf mit 9 Würfeln). Solche Ganzzahlberechnungen unterliegen der **Binomialverteilung** (die der Normalverteilung annähert, wenn n groß ist - siehe unten).

Die Berechnung des Mittelwerts kann in diesem Fall *nicht* richtig sein, da der Mittelwert von z.B. 3 3 3 3 3 3 3 1 und 3 3 3 3 3 3 3 4 unterschiedlich sind - und wir wollen nicht testen, ob $p(3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 4)$ und $p(3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 3\ 1)$ sind unterscheiden.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich 0, 1, 2, ...9 Mal die 3 bekomme, wenn ich 9 Würfel werfe?

`dbinom(0:9, 9, 1/6)`

1.938067e-01 3.488521e-01 **2.790816e-01** 1.302381e-01 3.907143e-02
7.814286e-03 1.041905e-03 8.930613e-05 4.465306e-06 9.922903e-08

zB ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich zwei Mal die 3 in 9 ungezinkten Würfeln werfe:
0.2790816

Wie benötigen die *kumulativen* Wahrscheinlichkeiten:

`pbinom(0:9, 9, 1/6)`

0.1938067 0.5426588 **0.8217404** 0.9519785 **0.9910499** 0.9988642
0.9999061 0.9999954 0.9999999 1.0000000

- Die Wahrscheinlichkeit, dass 2 oder weniger Würfel eine 3 in einem Wurf mit 9 Würfeln zeigen, ist (ganz genau) **0.8217404**.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ich 3 oder öfters eine 3 werfe ist $1-0.9519785 = 0.0480215$.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass ich 4 oder öfters eine 3 werfe ist $1-0.9910499 = 0.0089501$.

Ich benötige eine Anzahl, k , sodass die Wahrscheinlichkeit dass k oder mehr Würfel eine 3 in einem Wurf mit 9 Würfeln zeigen, weniger ist als 0.01:

`qbinom(0.99, 9, 1/6)`

4

Daher: wenn ich vier Mal eine 3 in einem Wurf von 9 Würfeln bekomme, klage ich den Händler an (da diese Wahrscheinlichkeit < 0.01 ist).

Bei hohem n (und je näher p an 0.5), umso mehr nähert sich der Normalverteilung die Binomialverteilung.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich einmal oder seltener (0 oder 1) eine 3 in einem Wurf mit 9 Würfeln bekomme?

Binomialverteilung

`pbinom(1, 9, 1/6)`

[1] 0.5426588

Normalverteilung

$n = 9; p = 1/6; q = 5/6$

$\mu = n * p$

$\text{sig} = \sqrt{n * p * q}$

`pnorm(1, mu, sig)`

[1] 0.3273604

Abweichung von $0.5426588 - 0.3273604 = 0.2152984$.

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich 15 Mal oder seltener eine 3 in einem Wurf mit 100 Würfeln bekomme?

Binomialverteilung

`pbinom(15, 100, 1/6)`

[1] 0.3876576

Normalverteilung

$n = 100$

$\mu = n * p$

$\text{sig} = \sqrt{n * p * q}$

`pnorm(15, mu, sig)`

[1] 0.3273604

Abweichung von $0.3876576 - 0.3273604 = 0.0602972$