Kovarianz, Korrelation, (lineare) Regression

Jonathan Harrington & Ulrich Reubold

```
library(lattice)

epg = read.table(file.path(pfadu, "epg.txt"))

amp = read.table(file.path(pfadu, "dbdauer.txt"))
```

Kovarianz, Korrelation, (lineare) Regression

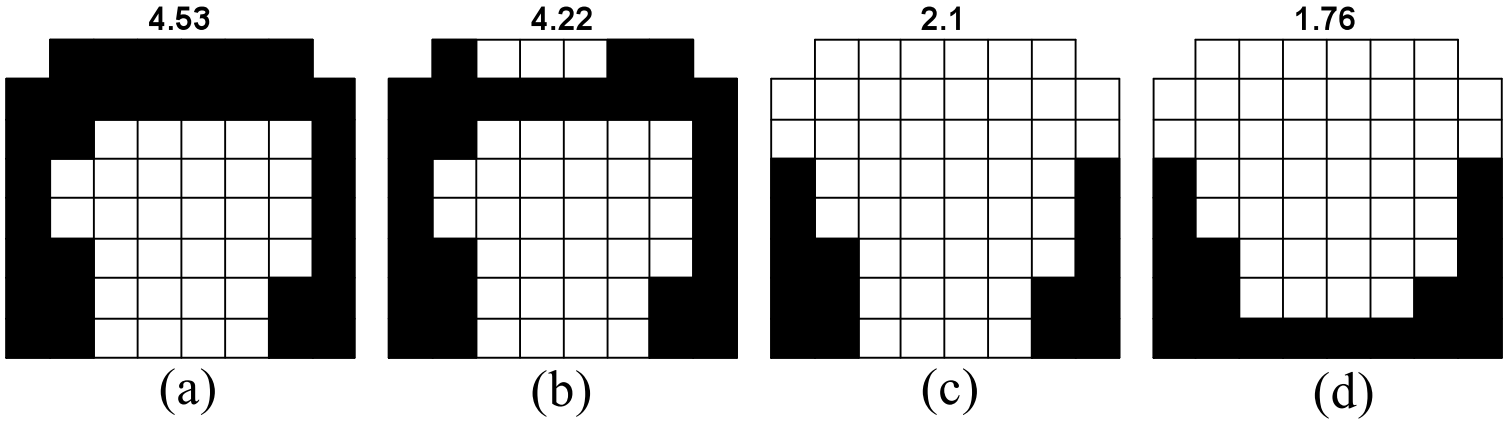
Eine Messung der Stärke der Beziehung zwischen 2 numerischen Variablen.

head(epg)

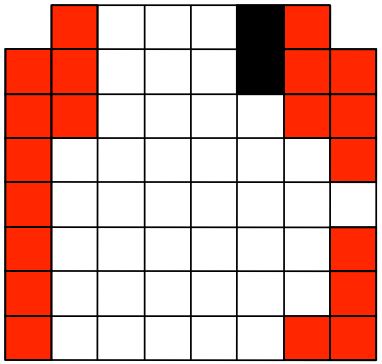
Vk-Reihenfolgen von einem deutschen Muttersprachler. V = /a ɛ ɪ i ɔ ʊ/

F1, F2: F1 und F2-Werte zum Vokaloffset

EPG-Parameter COG (Centre of Gravity) zum selben Zeitpunkt



EPG-Parameter SUM1278



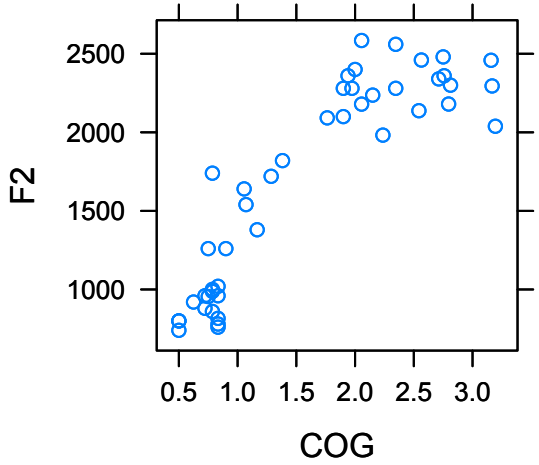
1. Kovarianz

Je mehr die Kovarianz von 0 (Null) abweicht, umso deutlicher die lineare Beziehung zwischen den Variablen

Kovarianz-Werte

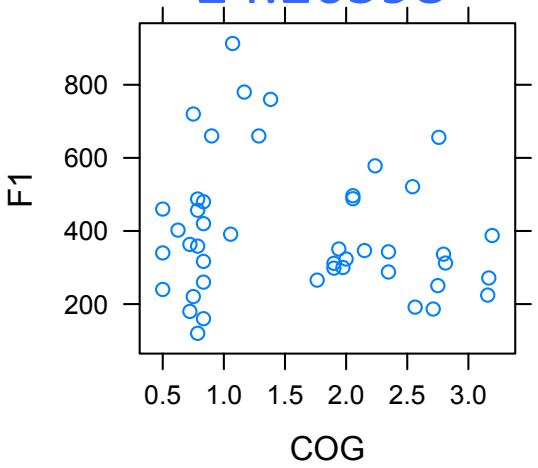
hoch und positiv

509.6908



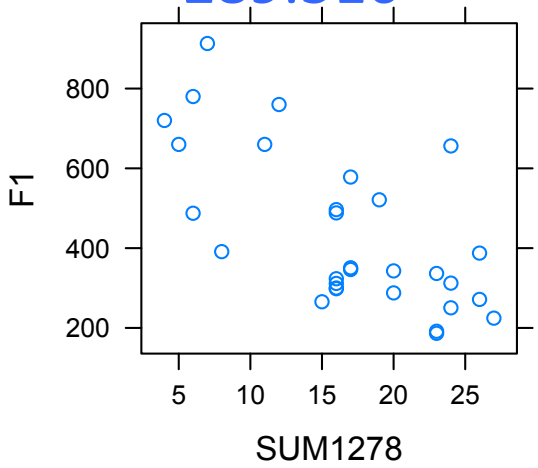
nah an 0

-24.26598



mittel und negativ

-289.516



Berechnung der Kovarianz

Produkt-Summe der Abweichungen vom Mittelwert

```
y = epg$F2
x = epg$COG
n = length(y)
```

Mittelwert

```
mx = mean(x)
```

```
my = mean(y)
```

Abweichungen vom Mittelwert

```
dx = x - mean(x)
```

```
dy = y - mean(y)
```

Kovarianz = Produkt-Summe der Abweichungen dividiert durch n-1

```
covxy = sum(dx*dy)/(n-1)
```

Funktion in R

```
cov(x, y)
```

Einige Merkmale der Kovarianz

$cov(x, y)$ gleicht $cov(y, x)$

$cov(x,x)$ gleicht $var(x)$

$var(x+y)$ gleicht $var(x)+var(y) + 2 * cov(x,y)$

daher: wenn es keine lineare Beziehung zwischen x und y gibt ist cov(x,y) 0 (Null) sodass

$var(x+y)$ gleicht $var(x) + var(y)$

2. Kovarianz und Korrelation

Die Korrelation (Pearson's product-moment correlation), *r*, ist dasselbe wie die Kovarianz, aber sie normalisiert für die Mengen von x und y

- *r* ist die Kovarianz von x, y, dividiert durch deren Standardabweichungen
- *r* variiert zwischen -1 und +1

```
cov(x,y)
```

```
[1] 509.6908
```

```
xgross = x*1000
```

```
cov(xgross,y)
```

```
[1] 509690.8
```

```
r = cov(x,y)/(sd(x) * sd(y))
```

```
cor(x,y)
```

```
[1] 0.8917474
```

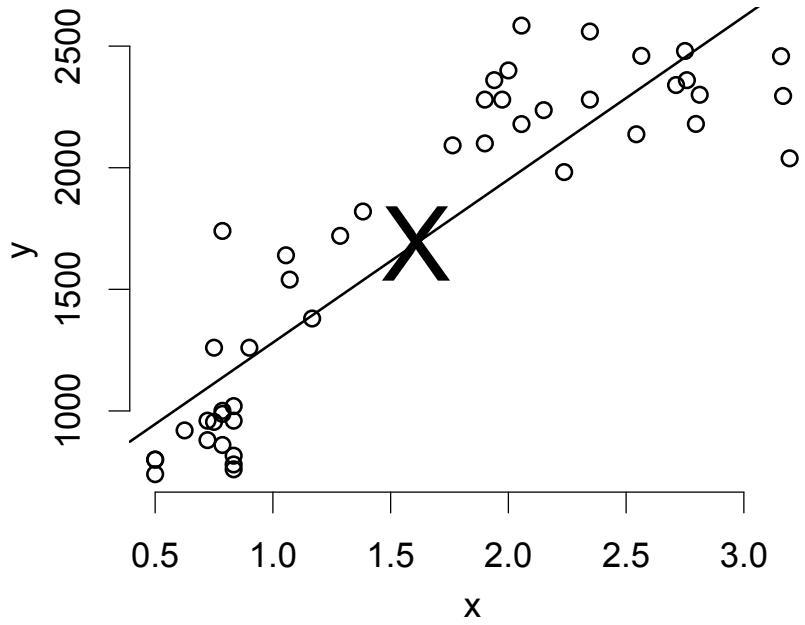
```
cor(xgross,y)
```

```
[1] 0.8917474
```

3. Regression

y-auf-x Regression: *y* (abhängige Variable) soll durch *x* (unabhängige Variable) modelliert werden, also **durch die Werte von *x* eingeschätzt werden**.

Regressionslinie: Eine gerade Linie durch die Verteilung, sodass der Abstand der Stichproben zu der Linie **minimiert** wird.



Diese Regressionslinie durchschneidet (mx, my) den Mittelwert (X) der Verteilung

3. Regression

Die Regressionslinie: $\hat{y} = bx + k$

b ist die Die Steigung

b = r * sd(y)/sd(x) oder b = cov(x,y)/var(x)

k ist das Intercept (y-Achsenabschnitt)

k = my - b*mx

$\hat{y}$ sind die eingeschätzten Werte, die auf der Regressionslinie liegen

yhut = b*x + k

Abbildung

plot(y ~ x)

Eingeschätze Werte überlagern

points(x, yhut, col = 2)

Regressionslinie überlagern

abline(k, b)

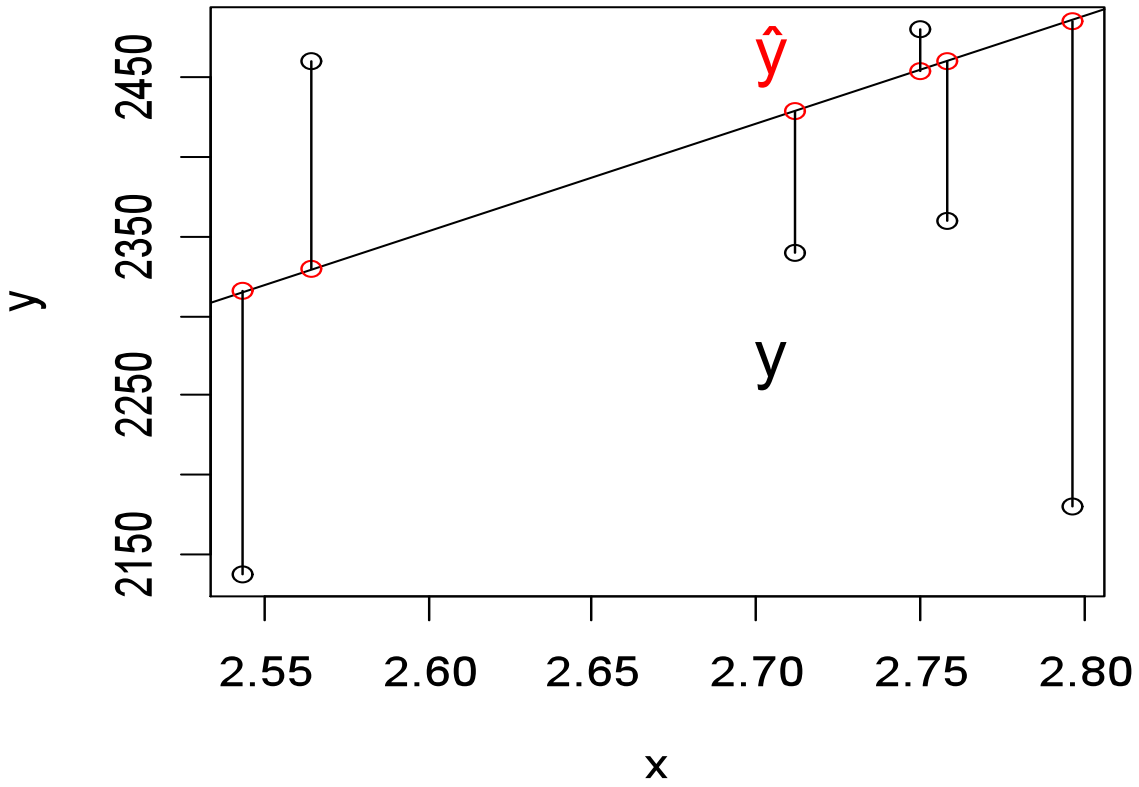
Error und SSE

Der **error** (auch residuals) ist der Unterschied zwischen den tatsächlichen und eingeschätzten Werten.

error = y - yhut

SSE: sum of the squares of the error

SSE = sum(error^2)



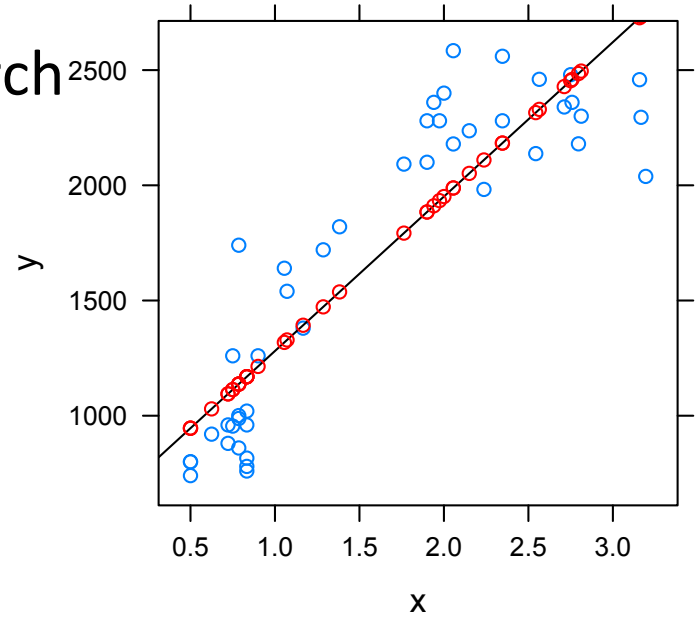
In der Regression wird die Linie auf eine solche Weise berechnet, dass SSE (RSS[1]) **minimiert** wird.

1. wird auch manchmal RSS residual sum of squares genannt

Regression mit lm()

```
reg = lm(y ~ x)
```

~ wird modelliert durch



Regressionslinie überlagern

```
plot(y ~ x)
abline(reg)
```

Regressionskoeffiziente

```
coef(reg)
```

Intercept

Steigung

```
(Intercept)           x
   610.6845    670.2670
```

Eingeschätzte Werte

```
yhut = predict(reg)
```

```
yhut = b*x + k
```

Error

```
residuals(reg)
```

```
error = y - yhut
```

SSE

```
deviance(reg)
```

```
sum(error^2)
```

Regression: drei wichtige Quantitäten

1. **SSE** (oder RSS) sum of the squared errors

SSE = sum(error^2) oder SSE = deviance(reg)

2. **SSY** (oder SST): sum-of-the-squared deviations der tatsächlichen Werte

SSY = sum((y - my)^2)

3. **SSR**: sum of the squared-deviations von $\hat{y}$, also von den eingeschätzten Werten

SSR = sum((yhut - my)^2)

SSY = SSR + SSE

R-squared (R^2)

SSY = SSR + SSE

Je besser die Werte durch die Regressionslinie modelliert werden (also je geringer der Abstand zwischen y und ŷ) umso kleiner SSE, sodass im besten Fall SSE = 0 und SSY = SSR oder SSR/SSY = 1 (bedeutet: die tatsächlichen Werte sitzen auf der Linie).

R-squared = SSR/SSY beschreibt auch die Proportion der Varianz in *y* die **durch die Regressionlinie erklärt werden kann**

R-squared variiert zwischen 0 (keine 'Erklärung') und 1 (die Regressionslinie erklärt 100% der Varianz in *y*).

R-squared (fortgesetzt)

SSY = SSR + SSE

Diese Quantität **SSR/SSY** nennt man auch **R-squared** weil sie **denselben Wert hat wie den Korrelationskoeffizient hoch zwei.**

SSR/SSY

cor(x, y)^2

[1] 0.7952134

(und da *r* zwischen -1 und 1 variiert, muss R-squared zwischen 0 und 1 variieren)

Signifikanz-Test

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein lineares Verhältnis zwischen x und y besteht?

Dies kann mit einem t-test mit n-2 Freiheitsgraden berechnet werden:

tstat = r/rsb

rsb = Standard-error von *r* = $\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}$

```
rsb = sqrt( (1 - r^2)/(n-2))

tstat = r/rsb
[1] 12.92187
```

Signifikanz-Test

tstat = r/rsb

[1] 12.92187

fstat = tstat^2

[1] 166.9746

Ein t-test mit n-2 Freiheitsgraden

2 * (1 - pt(tstat, n-2))

Ein F-test mit 1 und n-2 Freiheitsgraden

1 - pf(fstat, 1, n-2)

bekommt man auch durch cor.test(x,y)

[1] 2.220446e-16 = 2.220446×10^{-16}

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Variablen nicht miteinander linear assoziiert sind, ist fast 0. (Hoch signifikant, $p < 0.001$).

summary(reg)

Es gibt eine signifikante lineare Beziehung zwischen COG und F2 ($R^2 = 0.80$, $F[1, 43] = 167$, $p < 0.001$).

Call:
lm(formula = y ~ x)

Residuals:

Min	1Q	Median	3Q	Max
-713.17	-195.81	-99.32	215.81	602.68

Coefficients:

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(>|t|)
(Intercept)	610.68	94.65	6.452	8.03e-08 ***
x	670.27	51.87	12.922	< 2e-16 ***

Residual standard error: **300** on 43 degrees of freedom
Multiple R-Squared: 0.7952, Adjusted R-squared: 0.7905
F-statistic: **167** on 1 and 43 DF, **p-value: < 2.2e-16**

Gültigkeit der Regression[1]

Die Residuals sollen:

(a) von einer Normalverteilung nicht signifikant abweichen.

(b) eine konstante Varianz aufweisen.

(c) keine Autokorrelation aufweisen.

1. siehe auch
http://scc.stat.ucla.edu/page_attachments/0000/0139/reg_1.pdf

(a) Sind die Residuals normalverteilt?

```
shapiro.test(resid(reg))
```

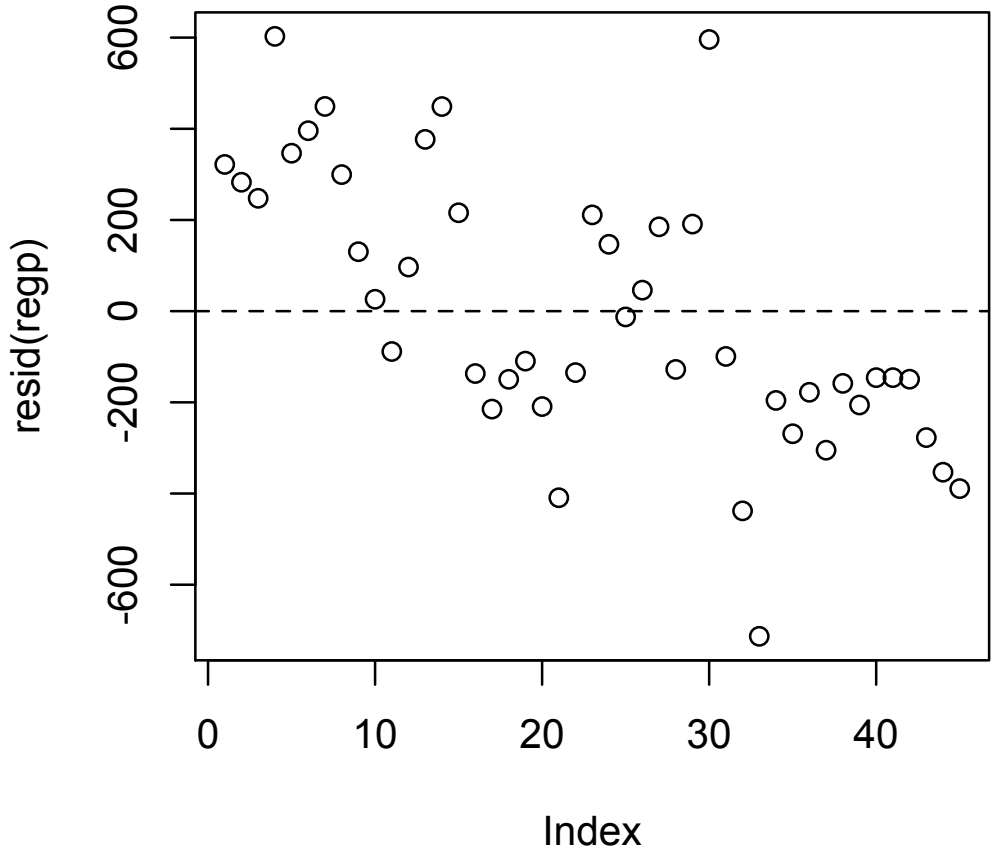
```
Shapiro-Wilk normality test

data:  resid(regp)
W = 0.9704, p-value = 0.2987
```

(b) Haben die Residuals eine konstante Varianz?

Insbesondere sollten die Residuals nicht wesentlich größer am Anfang/Ende sein, sondern auf eine randomisierte Weise um die 0 Linie verteilt sein. Das ist hier nicht der Fall.

plot(resid(reg))

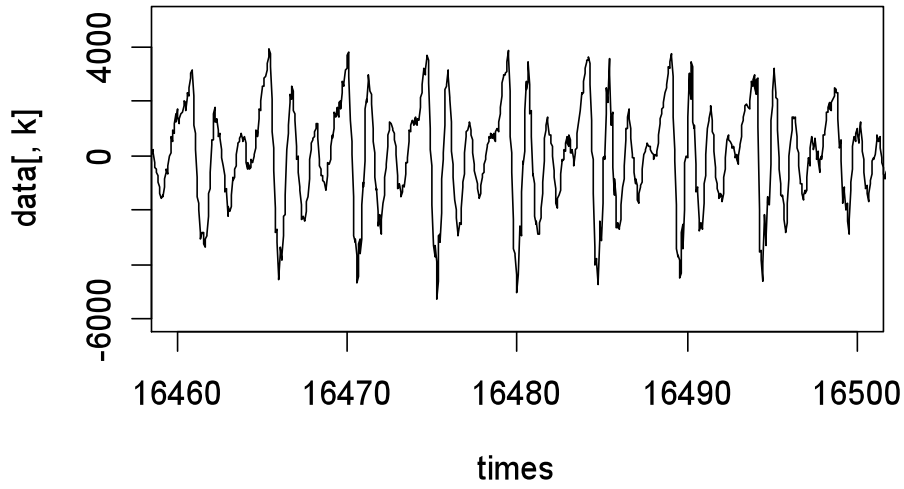
abline(h=0, lty=2)



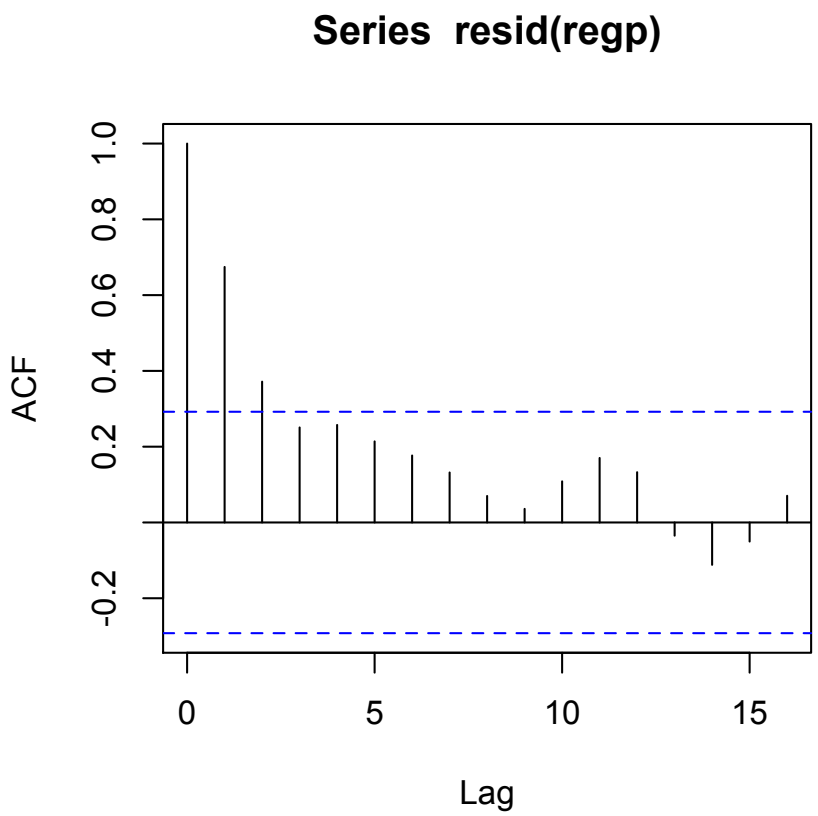
(c) Keine Autokorrelation

Autokorrelation ist wenn die Werte eines Signals mit sich selbst korreliert sind

Ein gutes Beispiel von autokorrelierten Daten: ein stimmfahtes Sprachsignal



(c) Keine Autokorrelation



acf(resid(reg))

95% Konfidenzintervall um 0

Wenn die meisten ACF-Werte innerhalb der blauen Linien liegen, gibt es keine Autokorrelation.

Insbesondere die Werte bei lag 1 und 2 beobachten: diese sollten innerhalb des Vertauensintervalls liegen (nicht der Fall).