Die t-Verteilung und die Prüfstatistik

Jonathan Harrington

Standard error of the mean (SE)

ist die Standardabweichung von Mittelwerten

Ich werfe 5 Würfel und berechne den Mittelwert der Zahlen

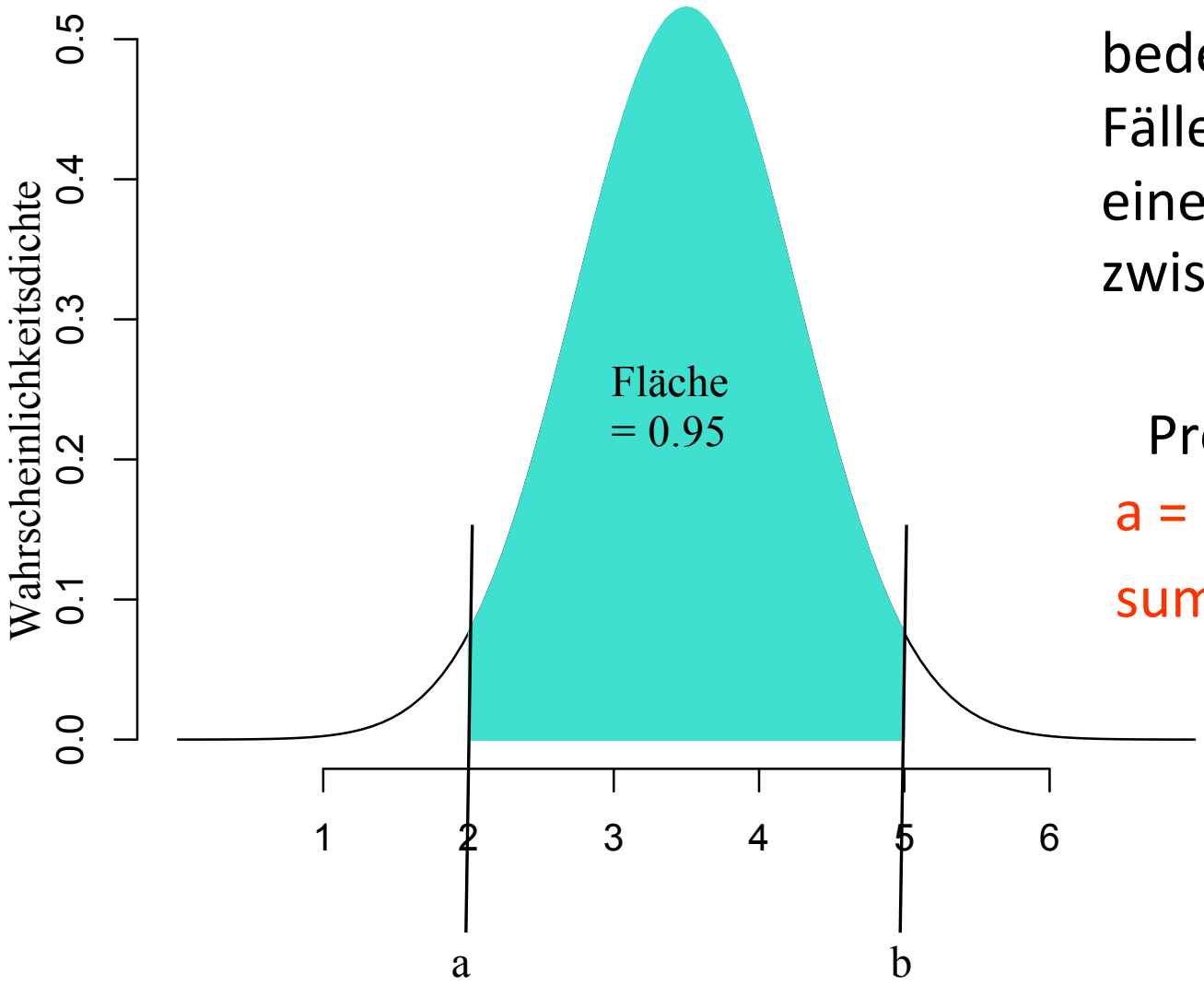
mu = 3.5 der wahrscheinlichste Wert

$$SE = \frac{\sigma}{\sqrt{5}}$$

Die Verteilung der Mittelwerte.
Bedeutung: ich werde nicht jedes Mal einen Mittelwert *m* = 3.5 bekommen, sondern davon abweichende Mittelwerte. Der SE ist eine numerische Verschlüsselung dieser Abweichung.

SE = sigma()/sqrt(5)

95% Konfidenzintervall



bedeutet: in 95/100 Fälle erwarte ich einen Mittelwert zwischen 2 und 5.

Probieren

```
a = proben(1, 6, 5, 100)
sum(a < 2 | a > 5)
```

```
a = qnorm(0.025, mu, SE)
2.003053
```

```
b = qnorm(0.975, mu, SE)
4.996947
```

Berechnungen wenn μ, σ unbekannt ist

1. μ, SE werden eingeschätzt

2. Verwendung der t-Verteilung statt der Normalverteilung

μ, σ ist unbekannt

Lenneberg behauptet, dass wir im Durchschnitt mit einer Geschwindigkeit von 6 Silben pro Sekunde sprechen.

Hier sind 12 Werte (Silben/Sekunde) von einem Sprecher.

werte

```
 [1]  6  5  6  9  6  5  6  8  5  6 10  9
```

Frage: sind diese Werte konsistent mit Lennebergs Hypothese?

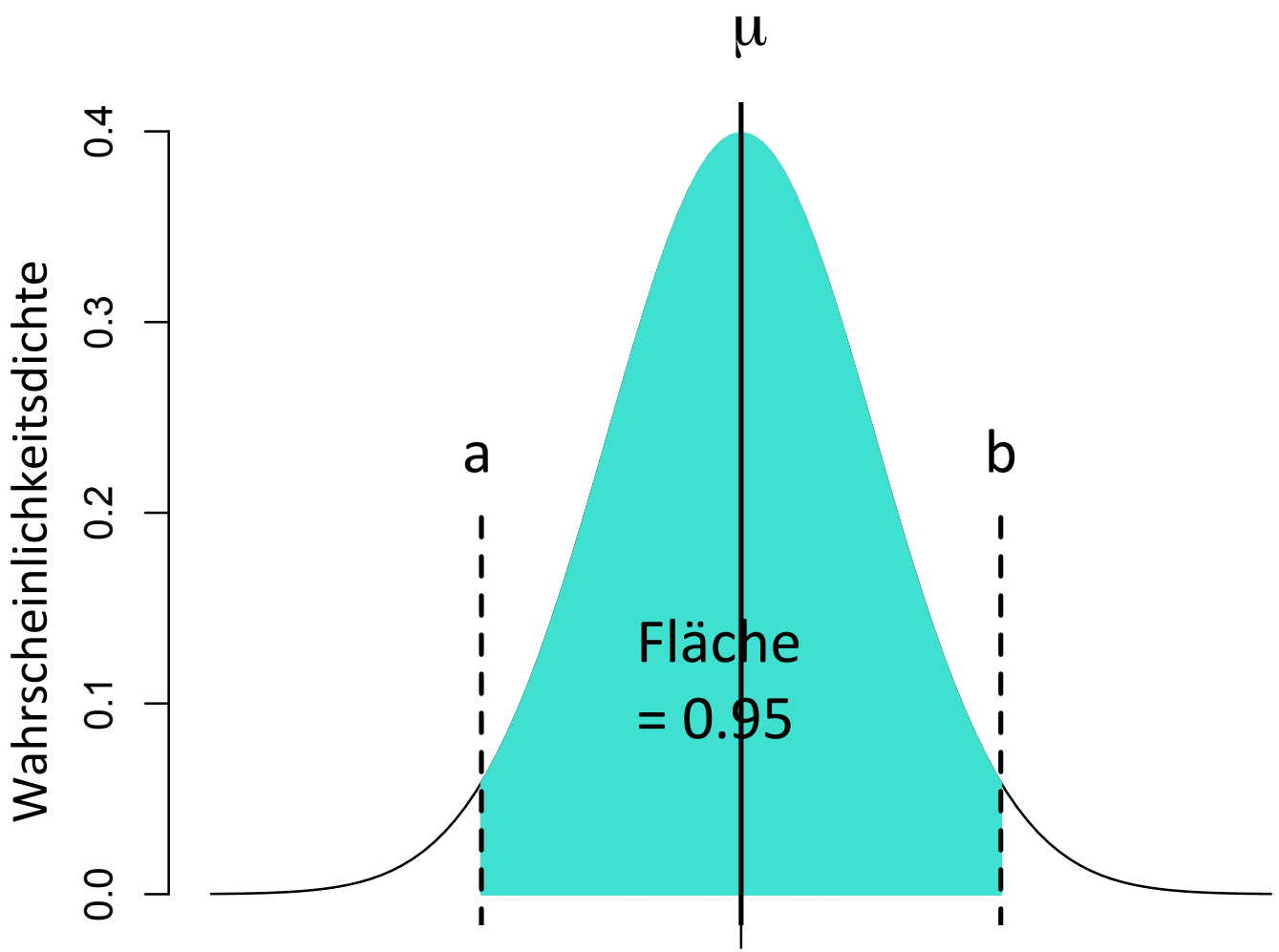
Vorgang: was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Unterschied zwischen dem Stichprobenmittelwert und 6 von 0 (Null) abweicht?

Das Verfahren: a one-sampled t-test

Das Verfahren im t-test

μ = der Unterschied zwischen den Mittelwerten

a, b: Grenzen des 95% Konfidenzinternvalls



Kommt 0 (Null) zwischen a und b vor?

1. Einschätzung von μ, SE

μ: 6 von jedem Wert abziehen, und den Mittelwert der Unterschiede berechnen

```
werte = werte - 6

mu = mean(werte)
```

Die beste Einschätzung von SE ist die Standardabweichung der Unterschiede (der Werte minus 6 in diesem Fall), *s* dividiert durch Wurzel *n* (Anzahl der Stichproben):

$$\hat{SE} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

In R:

```
n = length(werte)

SE = sd(werte)/sqrt(n)
```

2. die t-Verteilung

Wenn SE **eingeschätzt** werden muss, dann wird das Konfidenzintervall nicht mit der Normal- sondern der **t-Verteilung** mit einer gewissen Anzahl von **Freiheitsgraden** berechnet.

Die t-Verteilung ist der Normalverteilung recht ähnlich, aber die 'Glocke' und daher das Konfidenzintervall sind etwas breiter (dies berücksichtigt, die zusätzliche Unsicherheit wegen der Einschätzung von SE).

Bei diesem one-sample t-test ist die Anzahl der Freiheitsgrade, df (degrees of freedom), von der **Anzahl der Werte in der Stichprobe** abhängig: **df = n – 1**

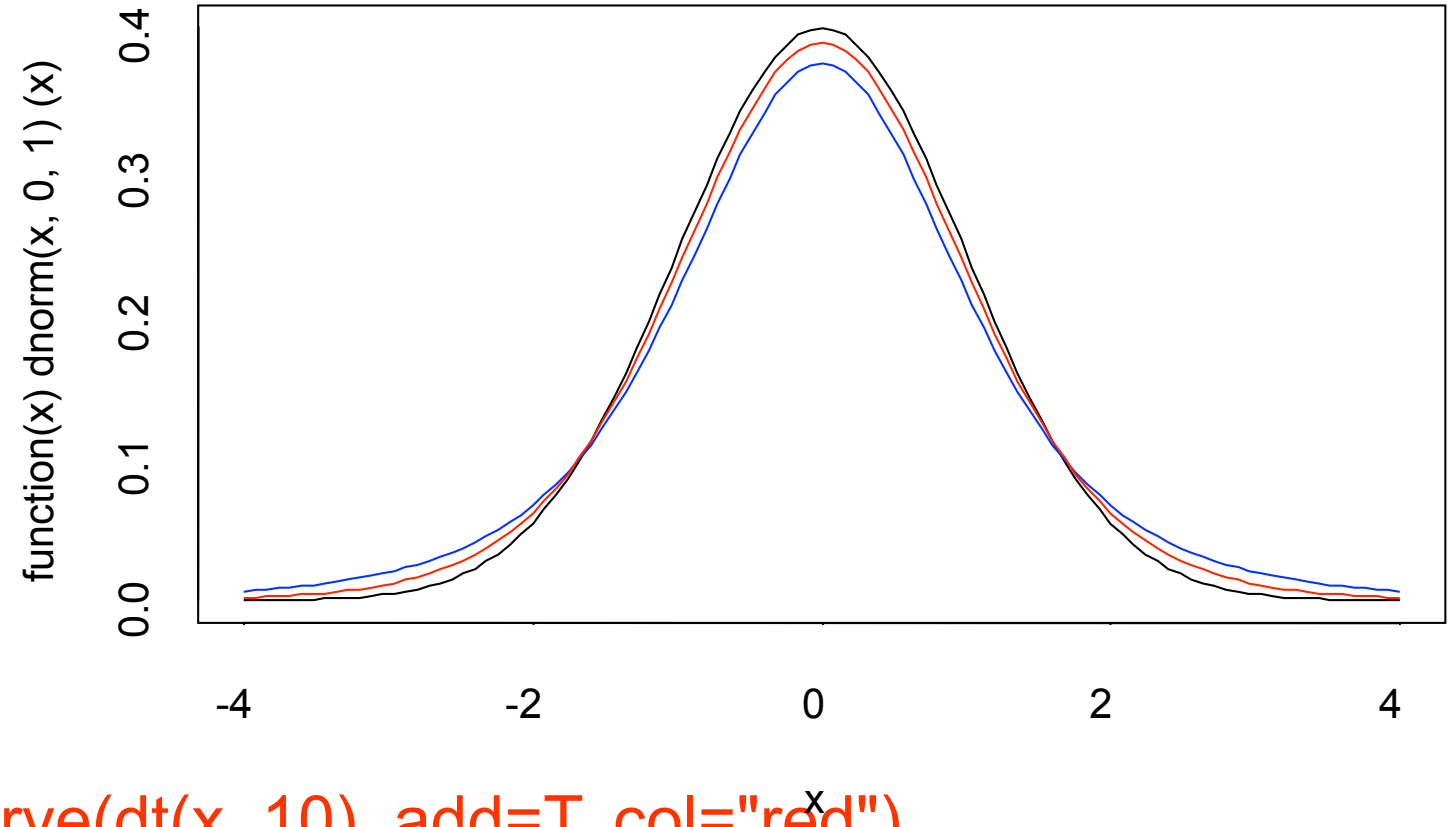
Je höher df, umso sicherer können wir sein, dass $\hat{SE} = SE$ und umso mehr nähert sich die t-Verteilung der Normalverteilung

Normalverteilung, $\mu = 0$, SE= 1.

curve(dnorm(x, 0, 1), -4, 4)

t-Verteilung, $\mu = 0$, SE = 1, df = 3

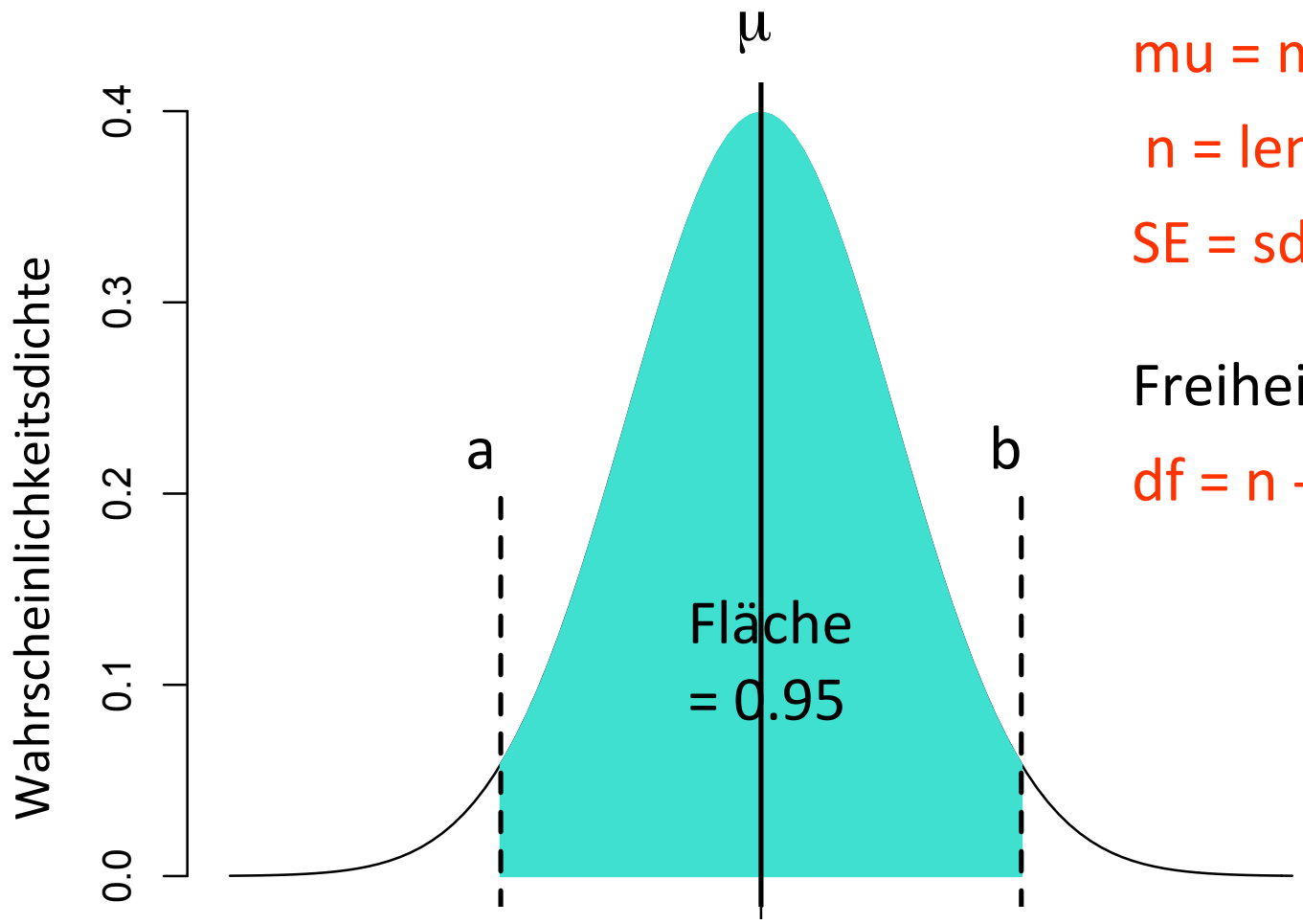
curve(dt(x, 3), add=T, col="blue")



curve(dt(x, 10), add=T, col="red")

Fällt 0 außerhalb des 95% Konfidenzintervalls von μ?

= kommt 0 zwischen *a* und *b* vor?



mu = mean(werte)

n = length(werte)

SE = sd(werte)/sqrt(n)

Freiheitsgrade

df = n - 1

mu + SE * qt(0.025, df)

-0.3711415

mu + SE * qt(0.975, df)

1.871142

Auf der Basis dieser Stichprobe liegt μ (der Unterschied zwischen den Mittelwerten) zwischen -0.3711415 und 1.871142 mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%.

Frage: sind diese Werte konsistent mit Lennebergs Hypothese?

Ja.

Ein einseitger t-Test in der Phonetik

wird eingesetzt, wenn der Mittelwert aus Unterschieden **pro Versuchsperson** berechnet wird (auch ein gepaarter t-test).

12 Sprecher produzierten /i/ in einer betonten und unbetonten Silbe. Hat die Betonung (=Faktor) einen Einfluss auf F2 (= die abhängige Variable)?

```
F2 = read.table(file.path(pfadu, "bet.txt"))
```

Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Unterschied zwischen den Mittelwerten (für betont und unbetont) 0 sein könnte (= kommt 0 innerhalb des 95% Konfidenzintervalls vor)?

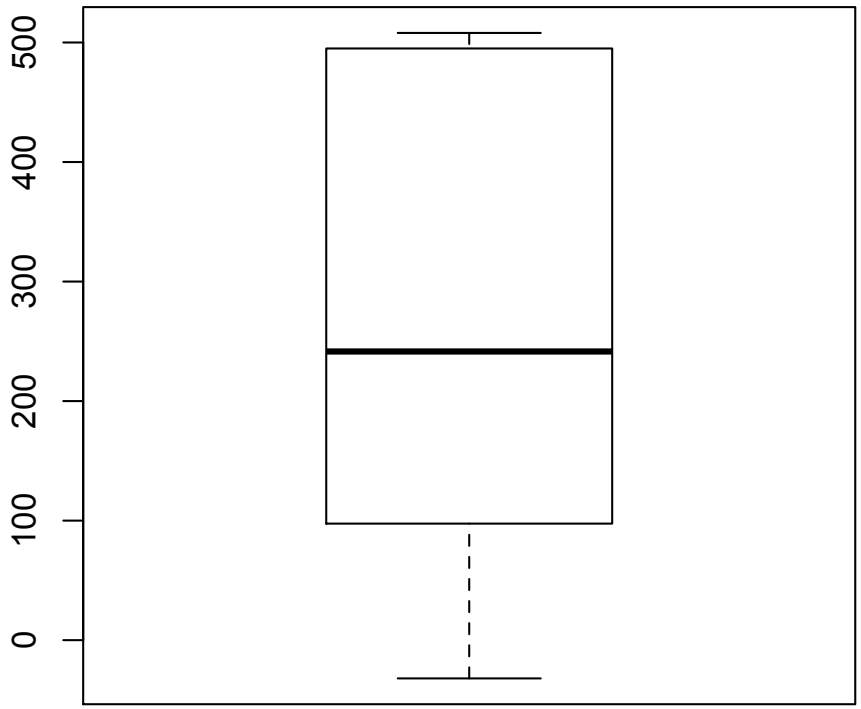
μ, SE der Mittelwert-*Unterschiede* einschätzen.

Die Unterschiede (betont-unbetont) pro Sprecher

```
F2unt = F2$betont - F2$unbeton
```

Zuerst eine Abbildung

boxplot(F2unt)



Wir werden die Wahrscheinlichkeit prüfen, dass der Mittelwert dieser Verteilung von 0 abweicht.

Berechnungen

μ

```
mu = mean(F2unt)
```

SE

```
n = length(F2unt)
SE = sd(F2unt)/sqrt(n)
```

df

```
df = n - 1
```

Konfidenzintervall

```
unten = mu + SE * qt(0.025, df)
```

134.0163

```
oben = mu + SE * qt(0.725, df)
```

309.3802

Kommt 0 innerhalb des Konfidenzintervalls vor?

unten = mu + SE * qt(0.025, df) 134.0163

oben = mu + SE * qt(0.975, df) 407.9837

Auf der Basis dieser Stichprobe liegt μ (der Unterschied zwischen den Mittelwerten) zwischen 134.0163 und 407.9837 mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%.

0 kommt innerhalb dieses Konfidenzintervalls nicht vor, daher:

Betonung beeinflusst F2 ($p < 0.05$)

(= die Wahrscheinlichkeit, dass Betonung keinen Einfluss auf F2 hat, liegt unter 0.05).

t.test(F2unt)

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Unterschied zwischen den Mittelwerten 0 sein könnte.

Die t-Statistik oder critical-ratio: mu/SE

= wieviele Standard-Errors μ und 0 voneinander entfernt sind

Freiheitsgrade

```
data:  F2unt
t = 4.3543, df = 11, p-value = 0.001147
alternative hypothesis: true mean is not equal
to 0
95 percent confidence interval:
 134.0163 407.9837
sample estimates:
mean of x
      271
```

Konfidenzintervall

μ (der Mittelwert der Unterschiede)

Betonung hat einen signifikanten Einfluss auf F2 oder F2 wird signifikant von der Betonung beeinflusst ($t[11] = 4.4$, $p < 0.01$)

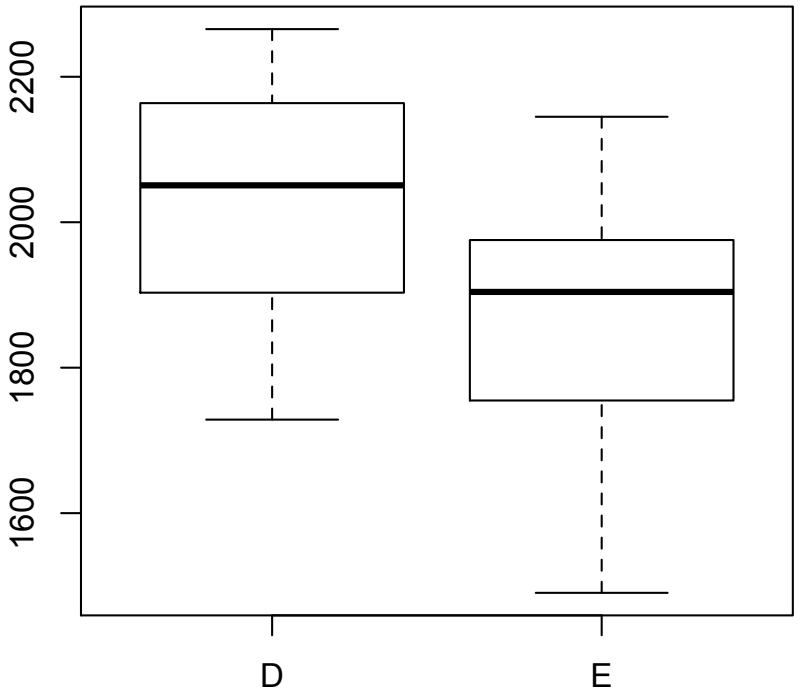
In der Phonetik wird ein solcher one-sample t-test eingesetzt, wenn gepaarte Werte **für die selbe Versuchsperson** vorliegen – wie im vorigen Fall: es gab einen betonten F2-Wert und einen unbetonten F2-Wert **pro Sprecher**, und der Unterschied wurde **pro Sprecher berechnet** (und dann der Mittelwert dieser Unterschiede).

Der two-sample t-test wird dagegen in der Phonetik dann eingesetzt, wenn sich **die Versuchspersonen unterscheiden**: z.B. wir wollen F2 in Männern und Frauen vergleichen; die Grundfrequenz von deutschen vs. französischen Sprechern usw.

Die Frage ist genau dieselbe, aber diesmal für 2 Gruppen: was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelwert-Unterschied (zwischen den Gruppen) 0 (Null) sein könnte?

Unterscheiden sich Deutsche und Engländer in F2 von /e/?

```
e.df = read.table(file.path(pfadu, "e.txt"))
head(e.df)
boxplot(F2 ~ Sprache, data = e.df)
```



= Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Unterschied zwischen den Mittelwerten der Gruppen von 0 (Null abweicht)?

```
t.test(F2 ~ Sprache, data = e.df)
```

t.test(F2 ~ Sprache, data = e.df)

```
data:  F2 by Sprache
t = 2.2613, df = 21.101, p-value =
0.03443
alternative hypothesis: true
difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  13.46719 320.73097
sample estimates:
mean in group D mean in group E
       2031.672        1864.573
```

Unterschiede zwischen den Mittelwerten: 167.099

Der Unterschied zwischen den Mittelwerten liegt zwischen 13.46719 und 320.73097 mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%.

Die Wahrscheinichkeit, dass die Mittelwert-Unterschiede 0 (Null) sein könnte = 0.03443

```
data:  F2 by Sprache
t = 2.2613, df = 21.101, p-value =
0.03443
alternative hypothesis: true
difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
  13.46719 320.73097
sample estimates:
mean in group D mean in group E
       2031.672        1864.573
```

Die Sprache hat einen signifikanten Einfluss auf F2 (t[21.1] = 2.3, $p < 0.05$)

oder

F2 wurde signifikant von der Sprache beeinflusst (t[21.1] = 2.3, $p < 0.05$)

Die Reaktionszeiten wurde in 15 Versuchspersonen gemessen, um Wörter zu identifizieren, wenn sie akzentuiert oder unakzentuiert waren. Hat Akzentuierung einen Einfluss auf die Reaktionszeit?

# RT-akzentuiert, Sprecher 1-15
rtaz = c(56, 49, 50, 39, 49, 60, 51, 39, 67, 49, 60, 46, 55, 54, 52)

# RT-unakzentuiert, in denselben Sprechern 1-15
rtun = c(95, 94, 121, 48, 135, 87, 94, 135, 98, 125, 92, 115, 80, 98, 108)

Boxplot

Test

Schlussfolgerung

Prüfen Sie für den Data-Frame owl, ob die Sprache (Lang) einen Einfluss auf die Reaktionszeit hatte (rt), um dieses Wort zu identifizieren.

```
owl = read.table(file.path(pfadu, "owl.txt"))
```

Boxplot

Test

Schlussfolgerung